

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ ПО МАТЕМАТИКА – VII КЛАС

17 юни 2020 г.

Вариант 2

ВТОРА ЧАСТ

Време за работа – 90 минути!

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 21. до 23. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Дадени са уравненията:

$$(1) \quad \frac{2}{3} \left(x - \frac{x-1}{5} \right) - \frac{(x-2)^2}{5} = \frac{x(10-3x)}{15},$$

$$(2) \quad |x+1| = 2 \text{ и}$$

$$(3) \quad x^2 + 2x - 3 = 0.$$

А) Решете уравнението (1).

Б) Решете уравнението (2).

В) Решете уравнението (3).

Г) Намерете кои от дадените уравнения са еквивалентни.

22. В четвъртък в резервоара на автомобила на Иван имало два пъти повече гориво, отколкото в резервоара на автомобила на брат му Стоян. В петък Стоян долял 15 L гориво в автомобила си, а Иван изразходвал 10 L от горивото в автомобила си. В събота всеки от тях тръгнал на път със своя автомобил и всеки от тях е изразходвал цялото налично гориво. Оказало се, че Стоян изминал с автомобила си 150 km по-дълго разстояние, отколкото брат му Иван. Автомобилът на Иван изразходва 12 L на 100 km, а този на Стоян – 8 L на 100 km. Нека x е количеството гориво в четвъртък в резервоара на автомобила на Стоян.

А) Изразете чрез x какво разстояние е изминал в събота Стоян с автомобила си.

Б) Изразете чрез x какво разстояние е изминал в събота Иван с автомобила си.

В) Намерете количеството гориво в четвъртък в резервоара на автомобила на Иван.

Г) Намерете колко километра е изминал в събота Стоян с автомобила си.

23. За $\triangle ABC$ е дадено, че градусните мерки на ъглите му са в следното отношение: $\sphericalangle CAB : \sphericalangle CBA : \sphericalangle ACB = 2:7:3$. Симетралата на страната AC пресича последователно ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и страната AB в точките M и K .

А) Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

Б) Докажете, че $\triangle KMC \cong \triangle KBC$.

В) Докажете, че $\triangle BCM$ е равнобедрен.

Г) Пресметнете обиколката на четириъгълника $BCMK$, ако $AM + MK = 6$ cm.

21	Общ брой точки:	12 точки, от които:
21А)	$x = 1$	5 точки
21Б)	$x_1 = 1$ и $x_2 = -3$	2 точки
21В)	$x_1 = 1$ и $x_2 = -3$	4 точки
21Г)	$(2) \Leftrightarrow (3)$	1 точка
22	Общ брой точки:	12 точки, от които:
22А)	$S_1 = 100 \cdot \frac{x+15}{8} = \frac{25(x+15)}{2}$, където S_1 е пътят, който е изминал автомобилът на Стоян.	3 точки
22Б)	$S_2 = 100 \cdot \frac{2x-10}{12} = \frac{25(2x-10)}{3}$, където S_2 е пътят, който е изминал автомобилът на Иван.	3 точки
22В)	58 L	4 точки
22Г)	$S_1 = 550$ km – пътят, който е изминал автомобилът на Стоян	2 точки
23	Общ брой точки:	11 точки, от които:
23А)	$\sphericalangle BAC = 30^\circ$, $\sphericalangle ABC = 105^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 45^\circ$	3 точки
23Б)	Виж примерно решение на зад. 23	5,5 точки
23В)	Виж примерно решение на зад. 23	0,5 точки
23Г)	$P_{\text{всмк}} = 12$ cm	2 точки

Задача 21. Примерно решение:

$$\text{А) (1) } \frac{2}{3} \left(x - \frac{x-1}{5} \right) - \frac{(x-2)^2}{5} = \frac{x(10-3x)}{15} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}\left(x - \frac{x-1}{5}\right) - \frac{x^2 - 4x + 4}{5} = \frac{10x - 3x^2}{15} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2x-2}{15} - \frac{x^2 - 4x + 4}{5} = \frac{10x - 3x^2}{15} \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot 2x - (2x-2) - 3(x^2 - 4x + 4) = 10x - 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$10x - 2x + 2 - 3x^2 + 12x - 12 = 10x - 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{10x} - 2x + 2 - \cancel{3x^2} + 12x - 12 = \cancel{10x} - \cancel{3x^2} \Leftrightarrow 10x = 10$$

Корен на уравнението е числото 1.

Б) (2) $|x+1|=2 \Leftrightarrow x+1=2$ или $x+1=-2$

Корените на уравнението (2) са $x_1=1$ и $x_2=-3$.

В) Допълваме двучлена x^2+2x до точен квадрат и представяме лявата страна на уравнението

(3) във вида $x^2+2x+1-1-3=0$ (или във вида $x^2+2x+1-4=0$). Тогава $(x^2+2x+1)-2^2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x+1-2)(x+1+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0$.

Или представяме лявата страна на уравнението във вида $x^2+3x-x-3=0$.

$$x^2+3x-x-3=0 \Leftrightarrow x(x+3)-(x+3)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0.$$

Корените на последното уравнение, а оттам и на уравнението (3), са $x_1=1$ и $x_2=-3$.

Г) От намерените корени на трите уравнения следва, че второто и третото уравнение имат еднакъв брой еднакви корени $x_1=1$ и $x_2=-3$. Следователно уравнението (2) е еквивалентно на уравнението (3).

Задача 22. Примерно решение:

А) След като в петък долял 15 L гориво, в събота Стоян имал в резервоара на автомобила си $(x+15)$ L. Нека приемем, че пътят, който е изминал Стоян с автомобила си с наличното гориво $(x+15)$ L, е S_1 . Тъй като той изминава 100 km с 8 L, то изразяваме по два начина

литрите гориво, които се изразходват за 1 km, приравняваме ги $\frac{x+15}{S_1} = \frac{8}{100}$ и получаваме

$$S_1 = 100 \cdot \frac{x+15}{8} = \frac{25(x+15)}{2}.$$

Б) В четвъртък Иван имал в резервоара на автомобила си $2x$ L гориво. След като изразходвал в петък 10 L, то в събота в резервоара на автомобила му имало $(2x-10)$ L. Нека приемем, че пътят, който е изминал Иван с автомобила си с наличното гориво $(2x-10)$ L, е S_2 . Тъй

като той изминава 100 km с 12 L, то изразяваме по два начина литрите гориво, които се изразходват за 1 km, приравняваме ги $\frac{2x-10}{S_2} = \frac{12}{100}$ и получаваме

$$S_2 = 100 \cdot \frac{2x-10}{12} = \frac{25(2x-10)}{3}.$$

В) За да намерим количеството гориво в четвъртък в резервоара на автомобила на Иван сравняваме пътищата, които могат да изминат автомобилите на двамата братя, т.е. $S_2 + 150 = S_1$ или $S_2 = S_1 - 150$.

Решаваме уравнението $\frac{25(2x-10)}{3} + 150 = \frac{25(x+15)}{2} \Leftrightarrow 25.2(2x-10) + 150.6 = 25.3(x+15)$

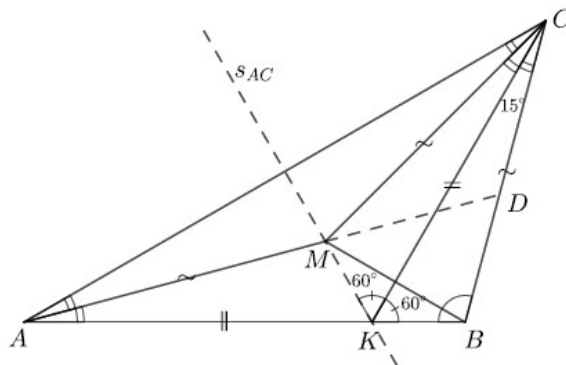
$$\Leftrightarrow 100x - 500 + 900 = 75x + 1125 \Leftrightarrow 25x = 725 \Leftrightarrow x = 29.$$

Количеството гориво в резервоара на автомобила на Стоян в четвъртък е 29 L, а в резервоара на автомобила на Иван е 58 L.

Г) Заместваме x с 29 във формулата за изминатия път $S_1 = \frac{25(29+15)}{2} = 550$ и получаваме, че пътят, който е изминал Стоян с автомобила си, е 550 km.

Задача 23. Примерно решение:

А) Нека градусните мерки на ъглите на триъгълника са съответно $\sphericalangle CAB = 2x$, $\sphericalangle CBA = 7x$ и $\sphericalangle ACB = 3x$. Прилагаме теоремата за сбор на ъглите в триъгълник и получаваме, че $2x + 3x + 7x = 180^\circ$, $x = 15^\circ$, $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, $\sphericalangle ABC = 105^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 45^\circ$.



Б) Тъй като $M \in s_{AC}$ и $K \in s_{AC}$, то $CM = AM$ и $AK = KC$.

От свойствата на ъглополовящата на ъгъл и на равнобедрените $\triangle AMC$ и $\triangle AKC$ следва, че $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle MCK = 15^\circ$. Следователно $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BCA - \sphericalangle KCA = 15^\circ$. Тъй като MK лежи и на симетралата на AC и на ъглополовящата в $\triangle AKC$, то

$$\sphericalangle AKM = \sphericalangle CKM = \frac{1}{2} \sphericalangle AKC = \frac{180^\circ - 4 \cdot 15^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Следователно $\sphericalangle BKC = 180^\circ - \sphericalangle AKC = 60^\circ$ (или $\sphericalangle BKC$ е външен за $\triangle AKC$ и $\sphericalangle BKC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$).

Тъй като $\sphericalangle BKM = 180^\circ - \sphericalangle AKM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ и $\sphericalangle MKC = 60^\circ$, то $\triangle KMC \cong \triangle KBC$ по втори признак за еднаквост:

(1) $\sphericalangle MCK = \sphericalangle BCK = 15^\circ$ (по доказателство);

2) $\sphericalangle MKC = \sphericalangle BKC = 60^\circ$ (по доказателство);

3) CK – обща страна.

В) От еднаквостта на триъгълниците $\triangle KMC$ и $\triangle KBC$ следва, че $BK = MK$ и $CB = CM$, откъдето следва, че $\triangle BMC$ е равнобедрен.

Г) По условие $AM + MK = 6$ cm, а по доказателство $CM = AM$, $CB = CM$ и $BK = MK$.

Следователно $P_{BCMK} = (CM + MK) + (CB + BK) = (CM + MK) + (CM + MK) = 2(CM + MK)$

т.е. $P_{BCMK} = 2(CM + MK) = 2(AM + MK) = 2 \cdot 6 = 12$

Получаваме, че $P_{BCMK} = 12$ cm.